



Vlaanderen
is wetenschap

13_103_15
WL rapporten

Geïdealiseerde processtudie van systeemovergangen naar hypertroebelheid

WP 6.1 Tijdsintegrator

DEPARTEMENT
MOBILITEIT &
OPENBARE
WERKEN

waterbouwkundiglaboratorium.be

Geïdealiseerde processtudie van systeemovergangen naar hypertroebelheid

WP 6.1 Tijdsintegrator

Brouwer, R.L.; Schramkowski, G.P.

Juridische kennisgeving

Het Waterbouwkundig Laboratorium is van mening dat de informatie en standpunten in dit rapport onderbouwd worden door de op het moment van schrijven beschikbare gegevens en kennis.

De standpunten in deze publicatie zijn deze van het Waterbouwkundig Laboratorium en geven niet noodzakelijk de mening weer van de Vlaamse overheid of één van haar instellingen.

Het Waterbouwkundig Laboratorium noch iedere persoon of bedrijf optredend namens het Waterbouwkundig Laboratorium is aansprakelijk voor het gebruik dat gemaakt wordt van de informatie uit dit rapport of voor verlies of schade die eruit voortvloeit.

Copyright en wijze van citeren

© Vlaamse overheid, Departement Mobiliteit en Openbare Werken, Waterbouwkundig Laboratorium, 2024

D/2022/3241/076

Deze publicatie dient als volgt geciteerd te worden:

Brouwer, R.L.; Schramkowski, G.P. (2024). Geïdealiseerde processtudie van systeemovergangen naar hypertroebelheid: WP 6.1 Tijdsintegrator. Versie 4.0. WL Rapporten, 13_103_15. Waterbouwkundig Laboratorium: Antwerpen

Overname uit en verwijzingen naar deze publicatie worden aangemoedigd, mits correcte bronvermelding.


Documentidentificatie

Opdrachtgever:	Vlaams-Nederlandse Scheldecommissie (VNSC)	Ref.:	WL2024R13_103_15
Trefwoorden (3-5):	Getij, sedimenttransport, estuaria, Schelde-estuarium		
Kennisdomeinen:	Sediment > Cohesief sediment > Numerieke modelleringen Sediment > Sedimenttransport > Numerieke modelleringen Sediment > Bovenafvoer > Numerieke modelleringen		
Tekst (p.):	21	Appendices (p.):	4
Vertrouwelijk:	Nee	<input checked="" type="checkbox"/> Online beschikbaar	
Auteur(s):	Brouwer, R.L.; Schramkowski, G.P		

Controle

	Name	Handtekening
Revisor(en):	De Maerschalcck, B.; Plancke, Y.	<p>Getekend door: Bart De Maerschalcck (Sig) Getekend op: 2024-09-25 13:15:42 +02:0 Reden: Ik keur dit document goed</p> <p><i>De Maerschalcck Bart</i>  Vlaamse overheid</p> <p>Getekend door: Yves Plancke (Signature) Getekend op: 2024-11-25 11:49:29 +01:0 Reden: Ik keur dit document goed</p> <p><i>Plancke Yves</i>  Vlaamse overheid</p>
Projectleider:	Schramkowski, G.P.	<p>Dr. George P. Schramkowski</p> <p><i>Digitaal ondertekend door Dr. George P. Schramkowski</i> Datum: 2024.09.30 11:06:58 +02'00'</p>

Goedkeuring

Afdelingshoofd:	Bellafkih, A.	<p>Getekend door: Abdelkarim Bellafkih (Sign) Getekend op: 2024-09-25 12:36:38 +02:0 Reden: Ik keur dit document goed</p> <p><i>Abdelkarim Bellafkih</i>  Vlaamse overheid</p>
-----------------	---------------	---

Abstract

Dit rapport geeft een technische beschrijving van de tijdsintegrator die binnen het geïdealiseerde model i-Flow de subtidale sedimentevolutie uitrekent in een getijgedomineerd estuarium. Hiermee kan bijvoorbeeld de respons van een systeem op variabele rivierafvoer worden onderzocht. De tijdsintegrator berekent het tijdsgedrag van de hoeveelheid sediment, zowel in suspensie als op de bodem. Hierbij wordt de opwerveling beschreven door gebruik te maken van een dynamische erodeerbaarheidsfunctie.

De ruimtelijke discretisatie geschiedt aan de hand van tweede-orde upwind en downwind (backward) schematisaties. Voor de tijdsintegratie kunnen een forward Euler schema (expliciet) of een Crank-Nicholson (CN) dan wel backward Euler (BE) schema (beiden impliciet) worden gebruikt. In de praktijk zijn tot dusverre enkel CN en BE gebruikt aangezien deze impliciete schema's betere stabiliteitseigenschappen hebben.

De prestatie van CN en BE wordt onderzocht in functie van tijdstap en fijnmazigheid van het rekengrid. Hiervoor wordt in eerste instantie het geïdealiseerde Scheldemodel met constante rivierafvoer beschouwd. Zoals verwacht vertoont het CN-schema tweede orde convergentie bij afnemende tijdstap. Omdat CN echter niet L-stabiel is treden bij grotere tijdstappen temporele oscillaties op die slechts langzaam uitdempen. Het BE-schema geeft een eerste orde nauwkeurigheid bij afnemende tijdstap, maar geeft ook bij grotere tijdstappen nog goede resultaten omdat het schema L-stabiel is. Zowel CN als BE laten bij benadering een kwadratische convergentie zien bij afnemende ruimtestap.

Tot slot worden CN en BE ook kort vergeleken voor het Scheldemodel met variabele rivierafvoer, gebaseerd op dagwaarden te Melle voor het jaar 2009. Hieruit blijkt dat BE bij sterk fluctuerende afvoeren betere resultaten geeft dan CN.

Inhoudsopgave

Abstract	III
Lijst van figuren	VII
Lijst van tabellen	VIII
1 Inleiding	1
2 Modelbeschrijving	2
2.1 Inleiding	2
2.2 Modelgeometrie	2
2.3 Hydrodynamica	3
2.4 Sedimentconcentratie	3
2.5 Tijdsevolutie van de bodempool	4
3 Oplossingsmethode	5
3.1 Perturbatiemethode	5
3.1.1 Relatie tussen relatieve erodeerbaarheid en sedimentvoorraad	6
3.1.2 Sedimenttransport en relatieve erodeerbaarheid	7
3.1.3 Morfodynamisch evenwicht	7
3.2 Discretisatie	8
3.2.1 Sedimentvoorraad	8
3.2.2 Sedimenttransport	9
3.3 Oplossen van de modelvergelijkingen	9
3.4 Numerieke aspecten	10
3.4.1 Stabiliteit van de numerieke methode	10
3.4.1.1 Forward Euler methode	10
3.4.1.2 Crank–Nicolson methode	10
3.4.1.3 Backward Euler methode	11
3.4.2 Nauwkeurigheid van de numerieke oplossing	11
4 Invoerfile voor de tijdsintegrator in iFlow	13
5 Modelresultaten	15
5.1 Model voor de Schelde	15
5.2 Gevoeligheid voor het schema voor tijdsintegratie	15
5.2.1 Stabiliteit	16
5.2.2 Nauwkeurigheid	16
5.3 Nauwkeurigheid van het ruimtelijk schema	17
5.4 Berekening met dagwaarden van de rivierafvoer te Melle	18
6 Samenvatting en conclusies	19
Referenties	20
B1 Afleiding evolutie sedimentvoorraad	B1
B2 Invoerfile iFlow	B2

B3 Jacobiaan van de modelvergelijkingen B3

Lijst van figuren

Figuur 1	Geometrie van het getjibekken zoals gebruikt in het geïdealiseerde model: (a) zijaanzicht, (b): bovenaanzicht.	2
Figuur 2	Grafische representatie van de functionele relatie $f(\tilde{\mathcal{S}})$. Voor verdere informatie zie tekst.....	6
Figuur 3	Regio van absolute stabiliteit voor a) forward Euler, b) Crank–Nicolson en c) backward Euler. ...	11
Figuur 4	Gedeelte van de invoerfile voor iFlow dat de sedimentmodules aanstuurt.	13
Figuur 5	Het Schelde estuarium.....	15
Figuur 6	Tijdsevolutie van \bar{f} als functie van de tijdstap Δt voor (a) de backward Euler methode en (b) de Crank–Nicolson methode.	16
Figuur 7	(a) relatieve fout en (b) orde van convergentie als functie van het aantal tijdstappen voor de backward Euler (blauwe lijn) de Crank–Nicolson methode (rode lijn).	17
Figuur 8	(a) relatieve fout en (b) orde van convergentie als functie van het aantal ruimtestappen voor de backward Euler (blauwe lijn) de Crank–Nicolson methode (rode lijn).	17
Figuur 9	(a) Verschil tussen $\langle \bar{c}_{BE}^{surf} \rangle$ en $\langle \bar{c}_{CN}^{surf} \rangle$ voor de rivierafvoer van de Schelde in het jaar 2009 en (b) detail van $\langle \bar{c}_{BE}^{surf} \rangle$ en $\langle \bar{c}_{CN}^{surf} \rangle$ voor het geprononceerde verschil in Fig. 9a tussen dagnummer 325 en 330.	18
Figuur 10	Hoofdgedeelte van de invoerfile voor iFlow. Het gedeelte dat de sedimentmodule aanstuurt is weergegeven in Fig. 4, Hoofdstuk 4.....	B2

Lijst van tabellen

Tabel 1 Standaard parameterwaarden van het gekalibreerde Scheldemodel. 16

1 Inleiding

Dit rapport betreft de oplevering van deliverable 6.1 van WL-project 13_103 "Geïdealiseerde processtudie van systeemovergangen naar hypertroebelheid". Het presenteert een technische beschrijving van het niet-lineaire model dat gebruikt is in Brouwer en Schramkowski, 2024 (Rapport 1.5) en verder ontwikkeld is in Brouwer *e.a.*, 2018 om de invloed van tijdsafhankelijke, externe forceringen op de sedimentverdeling in estuaria te onderzoeken.

In Hoofdstuk 2 wordt kort het sedimentmodel samengevat dat is geïntroduceerd in Rapport 1.5 en verder is uitgebreid in Brouwer *e.a.*, 2018. De voornaamste noviteit is de beschrijving van het concept van dynamische erodeerbaarheid en de tijdsevolutie van de totale hoeveelheid sediment in het systeem (zowel op de bodem als in de waterkolom). De oplossingsmethode van de modelvergelijkingen wordt in Hoofdstuk 3 beschreven. Hierin komt de perturbatiemethode aan bod, maar ook de numerieke implementatie in het iFlow pakket (Dijkstra *e.a.*, 2017). Vervolgens wordt in Hoofdstuk 4 een typische invoerfile voor iFlow besproken die inzicht geeft in de opties voor het tijdsintegratiemodel. In Hoofdstuk 5 wordt de nauwkeurigheid van de numerieke oplossing van het model getest voor verschillende tijd- en ruimtestappen met behulp van fout- en convergentieanalyses. Hierbij wordt de Schelde ingezet als testcase. Tevens zal voor een typische jaarlijkse rivierafvoer van de Schelde bekeken worden welke instellingen optimaal zijn. Als laatste worden de resultaten van deze analyse samengevat in Hoofdstuk 6.

2 Modelbeschrijving

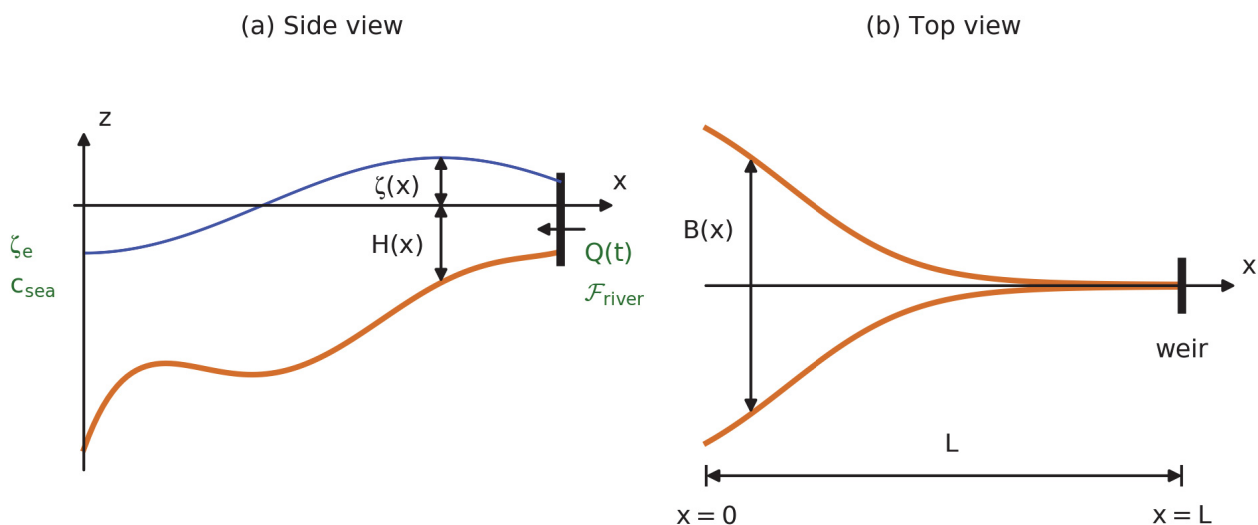
2.1 Inleiding

In dit hoofdstuk zal in het kort het 2DV sedimentmodel, dat is opgenomen in het iFlow modelpakket v2.4 (Dijkstra *e.a.*, 2017), samen met de uitbreiding voor het variëren van de sedimentconcentraties op de lange tijdschaal (Brouwer en Schramkowski, 2024; Brouwer *e.a.*, 2018) worden beschreven. Daaraan voorafgaand zullen eerst de gebruikte modelgeometrie en de hydrodynamische module beknopt worden beschreven. Voor meer detail hierover wordt verwezen naar Brouwer *e.a.*, 2017 (Rapport 1.3) en Brouwer *e.a.*, 2022 (Rapport 1.4).

2.2 Modelgeometrie

Het twee-dimensionale breedtegemiddelde (2DV) model maakt gebruik van een geschematiseerde weergave van de geometrie van een estuarium. De geometrie is die van een recht kanaal met lengte L en een variërend langsverloop van bodemdiepte $H(x)$ en breedte $B(x)$ (zie Fig. 1). Deze grootheden variëren geleidelijk op een lengteschaal vergelijkbaar met de bekkenlengte L . De zijwanden van het bekken zijn verticaal zodat er geen intergetijdengebieden (droogval) worden meegenomen. De zeewaartse rand bevindt zich op $x = 0$ terwijl ter hoogte van de opwaartse rand ($x = L$) een stuw is gelokaliseerd die een tijdsvariërende afvoer $Q(t)$ onderhoudt. Zijrivieren worden in de huidige aanpak niet meegenomen.

Er wordt aangenomen dat de waterbeweging in het estuarium getijgedomineerd is en dat de bijdrage van de rivierafvoer relatief klein is. Bovendien worden windeffecten verwaarloosd.



Figuur 1 – Geometrie van het getijbekken zoals gebruikt in het geïdealiseerde model: (a) zijaanzicht, (b): bovenaanzicht.

2.3 Hydrodynamica

Het hydrodynamische model berekent de breedtegemiddelde waterstand $\zeta(x, t)$ en de horizontale en verticale stroomsnelheid ($u(x, z, t)$ resp. $w(x, z, t)$) uit de Reynolds- en breedte-gemiddeld ondiepwater vergelijkingen. De effecten van Coriolis worden verwaarloosd en we nemen aan dat de dichtheidsvariaties klein zijn ten opzichte van de gemiddelde dichtheid, zodat de Boussinesq benadering gebruikt kan worden. Verder wordt een hydrostatische balans aangenomen en modelleren we de barocliene druk door een voorgeschreven (i.e. diagnostisch) tijdsafhankelijk zoutveld dat uniform verdeeld is in de verticaal. Verticale menging is constant in diepte en tijd, maar mag variëren in de langsrichting.

Aan de zeewaartse rand ($x = 0$) wordt een verticaal getij voorgeschreven dat enkel uit een M_2 -en M_4 -component bestaat en is gegeven door

$$\zeta_e = A_{M_2} \cos(\sigma t) + A_{M_4} \cos(2\sigma t - \varphi), \quad (1)$$

waarbij A_{M_2} , A_{M_4} , en φ respectievelijk de amplitudes van het verticale M_2 -en M_4 -getij zijn en φ hun faseverschil. De grootheid $\sigma \sim 1.4 \times 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$ is de hoekfrequentie van het M_2 -getij.

Aan de opwaartse rand ($x = L$) wordt een rivierafvoer voorgeschreven die kan variëren op een tijdschaal die groter is dan de M_2 -getijperiode. Deze voorwaarde kan worden uitgedrukt als

$$\int_{-H}^{\zeta} B(L)u(L, z, t) dz = -\langle Q(t) \rangle, \quad (2)$$

waarbij $\langle \cdot \rangle$ tijdsmiddeling over een M_2 -getijperiode voorstelt en het minteken aangeeft dat de rivierafvoer zeewaarts is gericht.

Er wordt aangenomen dat er geen schuifspanning wordt uitgeoefend op het wateroppervlak terwijl de kinematische schuifspanning op de bodem lineair is gerelateerd aan de bodemsnelheid via de zgn. *partial slip* conditie welke als volgt luidt

$$A_v u_z(x, -H, t) = s_f u(x, -H, t). \quad (3)$$

De grootheid s_f is de wrijvingsparameter en is een maat voor de hydraulische ruwheid van de bodem. De verticale viscositeit A_v is verticaal uniform maar hangt wel af van de ruwheid s_f en de lokale bodemdiepte $H(x)$ volgens (Dijkstra, 2022)

$$A_v = \frac{1}{2} s_f H = A_{v0} \frac{H}{H_0}, \quad (4)$$

waarbij $H_0 = H(x = 0)$ en $A_{v0} = s_f H_0 / 2$ de bodemdiepte resp. de verticale viscositeit aan de ingang voorstellen.

2.4 Sedimentconcentratie

Uitgangspunt voor het sedimenttransportmodel is de tijdsevolutievergelijking voor de breedtegemiddelde sedimentconcentratie $c(x, z, t)$

$$c_t + u c_x + w c_z = (w_s c + K_v c_z)_z + \frac{1}{B} (B K_h c_x)_x, \quad (5)$$

waarbij $(\cdot)_{,x}$, $(\cdot)_{,z}$ en $(\cdot)_t$ de afgeleide naar resp. lengte, diepte en tijd betekent. Verder is w_s de valsnelheid, die constant verondersteld wordt in ruimte en tijd. De verticale diffusiecoëfficiënt $K_v = A_v / \sigma_P$, waarbij het Prandtl-Schmidt getal $\sigma_P = 1$. De horizontale diffusiecoëfficiënt K_h wordt constant verondersteld.

Aan de zeewaartse rand wordt een diepte- en getijgemiddelde sedimentconcentratie, c_{zee} , voorgeschreven. Aan de landwaartse rand wordt het getijgemiddelde sediment transport gelijkgesteld aan een voorgeschreven fluviaal sedimentimport, \mathcal{F}_{rivier} , die kan variëren op een tijdschaal die lang is vergeleken met de getijperiode.

De verticale randvoorwaarden bij sedimentbalans (5) luiden dat er geen sedimenttransport door het wateroppervlak kan plaatsvinden, terwijl de opwaartsgerichte breedte-gemiddelde sedimentflux volgt uit het verschil tussen de instantane erosie E en depositie D . De depositieflux wordt gemodelleerd als $D = w_s c_{\text{bed}}$, terwijl de erosieflux volgt uit (Dijkstra *e.a.*, 2017)

$$E = \begin{cases} \hat{E} & \text{als } \mathcal{S}_{\text{bed}} > 0, \\ \min(\hat{E}, w_s c_{\text{bed}}) & \text{als } \mathcal{S}_{\text{bed}} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

waar \mathcal{S}_{bed} de hoeveelheid erodeerbaar sediment op de bodem is per vierkante meter. The grootheid \hat{E} is de potentiële erosie, oftewel de maximale erosieflux gegeven een overvloedige hoeveelheid erodeerbaar sediment op de bodem. De eerste conditie van Vgl. (6) zegt dus dat de daadwerkelijke erosieflux gelijk is aan de potentiële erosieflux als er enig sediment op de bodem aanwezig is. De tweede conditie betekent dat de erosieflux alleen de depositieflux kan compenseren als er geen erodeerbaar sediment op de bodem aanwezig is. Om de notatie te vergemakkelijken, wordt Vgl. (6) herschreven als

$$E = \hat{E} f^*, \quad (7)$$

waar $f^*(x, t)$ de *instantane relatieve erodeerbaarheid* is, zodanig dat

$$f^* = \begin{cases} 1 & \text{als } \mathcal{S}_{\text{bed}} > 0, \\ \min(1, \frac{w_s c_{\text{bed}}}{\hat{E}}) & \text{als } \mathcal{S}_{\text{bed}} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Hierbij varieert f^* tussen 0 (geen sediment op de bodem en geen depositie) en 1 (sediment op de bodem). De potentiële erosie kan beschreven worden door elke erosieformulering (zie b.v. Sanford en Maa, 2001) en wordt hier beschreven door (Chernetsky *e.a.*, 2010; Huijts *e.a.*, 2006)

$$\hat{E} = \frac{w_s \rho_s \hat{M}}{\rho_0 g' d_s} |\tau_b(x, t)|. \quad (9)$$

Hierbij zijn ρ_s en ρ_0 de dichtheden van sediment resp. water, terwijl $g' = g(\rho_s - \rho_0)/\rho_0$ de gereduceerde zwaartekrachtversnelling, d_s de korrelgrootte en \hat{M} de erosieparameter voorstellen. De erosieparameter wordt verkregen door middel van kalibratie. De grootheid $\tau_b(x, t)$ geeft tenslotte de bodemschuifspanning weer welke met bodemrandvoorwaarde (3) kan worden geschreven als

$$\tau_b = \rho_0 A_v u_z(x, -H, t) = \rho_0 s_f u(x, -H, t), \quad (10)$$

2.5 Tijdsevolutie van de bodempool

Conform Brouwer *e.a.*, 2018, wordt de tijdsevolutie van de sedimentdistributie als gevolg van tijdsafhankelijke rivierafvoer beschouwd. Hierbij wordt op basis van de waterbeweging en sedimentconcentratie de tijdsevolutie van de actieve bodempool \mathcal{S}_{bed} bepaald door het verschil tussen de (lokale) depositie, D , en de erosie, E :

$$B(\mathcal{S}_{\text{bed}})_t = B(D - E). \quad (11)$$

3 Oplossingsmethode

3.1 Perturbatiemethode

Op dezelfde manier als gedaan is in Brouwer *e.a.*, 2018; Chernetsky *e.a.*, 2010; Dijkstra *e.a.*, 2017 en Rapporten 1.3, 1.4, en 1.5, wordt een perturbatiemethode toegepast om een benaderde oplossing te vinden van het volledige systeem van vergelijkingen uitgezet in Hoofdstuk 2. Deze methode is uitermate geschikt om de relevante processen te identificeren die ten grondslag liggen aan de globale sedimentbalans in estuaria. De stappen die genomen worden in de perturbatiemethode zijn: 1) schaling van de modelvergelijkingen, 2) asymptotische expansie van de fysische variabelen, en 3) harmonische decompositie van de fysische variabelen. Voor een gedetailleerde beschrijving van deze methode wordt verwezen naar Brouwer *e.a.*, 2018; Dijkstra *e.a.*, 2017. Hier wordt enkel een beknopte samenvatting gegeven.

Tijdens de eerste stap worden de ordes van magnitude van de termen in de modelvergelijkingen bepaald. Hierbij wordt er een kleine parameter ε geïdentificeerd, waaraan alle termen worden gerelateerd. De parameter ε is gedefinieerd als de ratio van de amplitude van het M_2 waterniveau en de bodemdiepte aan de ingang van het estuarium:

$$\varepsilon = \frac{A_{M_2}}{H_0} \ll 1. \quad (12)$$

Voorts wordt aangenomen dat de ratio A_{M_2}/A_{M_4} en de subtidale snelheden door de rivierafvoer en barocliene drukgradiënt van orde ε zijn ten opzichte van de M_2 getijsnelheid. Het expanderen van de fysische variabelen in een serie in ε (stap 2) leidt ertoe dat de volledige set van modelvergelijkingen gereduceerd kan worden in een gekoppelde set lineaire vergelijkingen op verschillende ordes in ε . Deze set vergelijkingen is veel eenvoudiger op te lossen dan het originele probleem.

In de laatste stap van de perturbatiemethode worden de geordende fysische variabelen opgesplitst in harmonische componenten. Hierbij wordt de belangrijke aanname gedaan dat de relatieve erodeerbaarheid alleen op de lange, subtidale tijdschaal varieert. Deze getijgemiddelde relatieve erodeerbaarheid is gedefinieerd als een gewogen gemiddelde (Brouwer *e.a.*, 2018),

$$f = \frac{\langle f^* \hat{C}(t) \rangle}{\langle \hat{C}(t) \rangle}. \quad (13)$$

Hier is $\hat{C}(t)$ de lokale, diepte-geïntegreerde concentratie bij maximale erodeerbaarheid ($f = 1$) en $\langle \cdot \rangle$ middeling over een M_2 getijperiode. Dientengevolge kan $\langle \hat{C} \rangle$ gezien worden als het subtidale sedimentdragende vermogen, oftewel de maximale, lokale (gemiddelde) hoeveelheid sediment in suspensie voor gegeven hydraulische condities:

$$\hat{C} = \int_{-H}^0 \langle \hat{c} \rangle dz. \quad (14)$$

Alle andere fysische variabelen (waterniveau, snelheid en sedimentconcentratie) variëren zowel op de lange subtidale als de korte getijtijdschaal. Door de harmonische decompositie, waarbij we alleen getijcomponenten meenemen tot en met M_4 , kunnen we de fysische variabelen als volgt schrijven

$$u = u_{M_2}^0 + \langle u^1 \rangle + u_{M_4}^1, \quad (15)$$

$$\zeta = \zeta_{M_2}^0 + \langle \zeta^1 \rangle + \zeta_{M_4}^1, \quad (16)$$

$$c = \langle c^0 \rangle + c_{M_4}^0 + c_{M_2}^1. \quad (17)$$

Hierbij geven sub-indices de getijcomponent aan, terwijl super-indices de orde van ε . Verder valt op dat voor de snelheid en het waterniveau de M_2 -component dominant is ten opzicht van de subtidale en M_4 -componenten, terwijl dat voor de concentratie precies andersom is.

De sediment concentratie hangt nog steeds af van de relatieve erodeerbaarheid $f(t)$. Vgl. (17) kan daarom geschreven worden als

$$c(x, z, t) = f c^f + f_x c^{fx}, \quad (18)$$

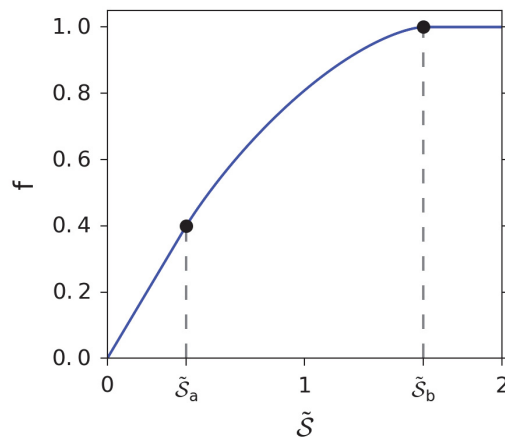
waar c^f en c^{fx} afhankelijk zijn van resp. f en f_x en bovendien volledig bepaald worden door de leidende orde waterbeweging (voor meer details zie Brouwer *e.a.*, 2018).

3.1.1 Relatie tussen relatieve erodeerbaarheid en sedimentvoorraad

Om een expliciete uitdrukking te krijgen voor de onbekende relatieve erodeerbaarheid $f(x, t)$ relateren we deze aan de totale, getijgemiddelde hoeveelheid sediment (gesuspendeerd sediment plus erodeerbaar sediment op de bodem) per vierkante meter. Vervolgens kunnen we f oplossen door de tijdsevolutie van de totale, getijgemiddelde hoeveelheid sediment te beschouwen. We nemen aan dat alleen de bovenste laag van de bodem sediment kan uitwisselen met de waterkolom door erosie en depositie en dat eender welke verandering in sedimentmassa in deze laag geen significante verandering van het bodemniveau $H(x)$ veroorzaakt. We definiëren nu de sedimentvoorraad, \mathcal{S} , als de totale, getijgemiddelde hoeveelheid sediment in de actieve sedimentlaag, \mathcal{S}_{bed} , en in de waterkolom per vierkante meter:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x, t) &= \left\langle \mathcal{S}_{bed}(x, t) + \int_{-H}^0 c(x, z, t) dz \right\rangle \\ &= \langle \mathcal{S}_{bed}(x, t) \rangle + f(x, t) \langle \hat{C} \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

In Brouwer *e.a.*, 2018 wordt een expliciete uitdrukking afgeleid tussen de relatieve erodeerbaarheid f en de dimensieloze sedimentvoorraad $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} / \langle \hat{C} \rangle$, die leidt tot de grafische representatie in Fig. 2.



Figuur 2 – Grafische representatie van de functionele relatie $f(\tilde{\mathcal{S}})$. Voor verdere informatie zie tekst

Refererend aan Fig. 2 geldt dat voor $\tilde{\mathcal{S}} < \tilde{\mathcal{S}}_a$ de sedimentvoorraad kleiner is dan het (benaderde) sediment-dragende vermogen. In dit geval is de bodemschuifspanning bijna altijd sterk genoeg om al het sediment van de actieve laag te eroderen. Dit resulteert in een voornamelijk zandige bodem, waarbij $f = \tilde{\mathcal{S}}$. Wanneer $\tilde{\mathcal{S}}_a < \tilde{\mathcal{S}} < \tilde{\mathcal{S}}_b$, dan geldt dat er fijn sediment in de actieve laag zit gedurende tenminste een gedeelte van een getijperiode. Dit leidt tot een sub-lineaire relatie tussen f en $\tilde{\mathcal{S}}$. De twee eerder genoemde situaties worden beschouwd als *beschikbaarheidsgelimiteerde condities*, omdat de hoeveelheid fijn sediment in de actieve laag bepaald hoeveel sediment er in suspensie kan zijn.

Als $\tilde{S} > \tilde{S}_b$, dan zal er altijd fijn sediment in de actieve laag aanwezig zijn gedurende een getijperiode. Dit betekent dat de hoeveelheid sediment gelimiteerd wordt door het sedimentdragende vermogen van de stroming en $f = 1$. Deze situatie wordt een *erosiegelimiteerde conditie* genoemd.

3.1.2 Sedimenttransport en relatieve erodeerbaarheid

Door de concentratievergelijking (5) te integreren over de diepte en de breedte en gebruikmakend van Vgl. (19), kan de leidende orde, getijgemiddelde contributie aan de bodempeel-evolutievergelijking (11) herschreven worden in termen van de totale sedimentvoorraad, S , en de divergentie van het subtidale sedimenttransport, $B\mathcal{F}$ (zie Appendix B1):

$$BS_t = -(B\mathcal{F})_x, \quad (20)$$

waarbij

$$\mathcal{F} \equiv \left\langle \int_{-H}^{\zeta} (uc - K_h c_x) dz \right\rangle. \quad (21)$$

Aangezien de sedimentconcentratie gerelateerd is aan $f(x, t)$ (zie Vgl. 18), reduceert Vgl. (20) in leidende orde tot

$$BS_t = -(B[Tf + Ff_x])_x. \quad (22)$$

Hier worden de functies T en F volledig bepaald door de leidende en eerste orde waterbeweging. Zie Rapporten 1.3, 1.4 en Brouwer *e.a.*, 2018; Chernetsky, 2012 voor expliciete uitdrukkingen van T en F .

De randvoorwaarden behorende bij Vgl. (22) worden gespecificeerd in termen van $f(x, t)$. Aan de zeewaartse rand wordt de diepte- en getijgemiddelde gesuspenderde sedimentconcentratie c_{zee} voorgeschreven, wat resulteert in f_{zee} zodanig dat

$$f_{zee} \equiv \frac{H_0 c_{zee}}{\langle \hat{C} \rangle |_{x=0}}. \quad (23)$$

Aan de landwaartse rand wordt het totale netto sedimenttransport, \mathcal{F} , gelijkgesteld aan de fluviatiele sedimenttoevoer, \mathcal{F}_{rivier} , zodanig dat

$$(B[Tf + Ff_x])_{x=L} = -\mathcal{F}_{rivier}, \quad (24)$$

waarbij het minteken aan de rechterkant van Vgl. (24) aangeeft dat $\mathcal{F}_{rivier} > 0$ een sedimentimport vanuit de rivier voorstelt.

Als laatste moet een initiële conditie voor f opgelegd worden, waarbij f een niet-negatieve functie is die gelijk aan of kleiner is dan 1 en voldoet aan de randvoorwaarden.

3.1.3 Morfodynamisch evenwicht

Om de sedimentconcentraties in een estuarium te berekenen, wordt gebruik gemaakt van het concept *morfodynamisch evenwicht* (Chernetsky *e.a.*, 2010; Friedrichs *e.a.*, 1998). Hierbij wordt aangenomen dat de totale hoeveelheid sediment in het estuarium varieert op een tijdschaal die veel langer is dan de typische tijd waarop erodeerbaar sediment longitudinaal verdeeld kan worden. Dit impliceert dat het getijgemiddelde sedimenttransport, \mathcal{F} , divergentie vrij dient te zijn, oftewel overal in het bekken is er een netto balans tussen erosie en depositie en de bodem zal dus niet veranderen. De sedimentverdeling in morfodynamisch evenwicht wordt beschreven door (Brouwer *e.a.*, 2018)

$$c_{meq}(x, z, t) = f_{meq} c^f + f_{meq_x} c^{fx}, \quad (25)$$

waarbij

$$f_{meq}(x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{T}{F} dx'\right) \left(f_{zee} - \mathcal{F}_{rivier} \int_0^x \exp\left(\int_0^{x'} \frac{T}{F} dx''\right) \frac{dx'}{BF}\right), \quad (26)$$

de evenwichtsverdeling van de relatieve erodeerbaarheid is.

In de huidige beschrijving van het model is het niet evident of deze evenwichtsverdeling van het sediment bereikt zal worden. Volgens Brouwer *e.a.* (2018) kan deze verdeling zich alleen instellen voor beschikbaarheidsgelimeerde condities, wanneer een (nagenoeg) constante, relatief hoge rivierafvoer voor een langere periode aanhoudt.

3.2 Discretisatie

De door de perturbatiemethode verkregen gereduceerde modelvergelijking (20) wordt vervolgens in termen van $\tilde{S} = S / \langle \hat{C} \rangle$ met de numerieke methode van Newton–Raphson opgelost. Naast Vgl. (20) worden hierbij de uitdrukkingen voor $\mathcal{F} = Tf + Ff_x$ en $f = f(\tilde{S})$ gediscrètiseerd:

$$\tilde{S}_t + \frac{\tilde{S}}{\langle \hat{C} \rangle} \langle \hat{C} \rangle_t + \frac{1}{\langle \hat{C} \rangle} \left(\mathcal{F}_x + \frac{B_x}{B} \mathcal{F} \right) = 0, \quad (27)$$

$$\mathcal{F} - Tf - Ff_x = 0, \quad (28)$$

$$f - f(\tilde{S}) = 0. \quad (29)$$

Vgl. (29) is een algebraïsche vergelijking en hoeft dus niet gediscrètiseerd te worden. Er wordt gekozen om bij de discretisatie van Vgl. (27)–(28) gebruik te maken van een standaard θ -schema voor tijdsintegratie, terwijl voor de ruimtelijke integratie zowel een tweede-orde upwind (Vgl. 27) als downwind schema (Vgl. 28) wordt ingezet. In de volgende twee subsecties wordt de discretisatie van Vgl. (27) en (28) in detail uitgewerkt. Bij het discrètiseren van de modelvergelijkingen houden we de volgende notatie aan voor een willekeurige variabele: $\Phi(i\Delta x, n\Delta t) = \Phi_i^n$.

3.2.1 Sedimentvoorraad

Voor de vergelijking van de sedimentvoorraad (Vgl. 27), ziet het standaard θ -schema er als volgt uit

$$\frac{\tilde{S}_i^{n+1} - \tilde{S}_i^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{S}_i^n}{\langle \hat{C} \rangle_i^{n+1}} \frac{\langle \hat{C} \rangle_i^{n+1} - \langle \hat{C} \rangle_i^n}{\Delta t} + \theta G_i^{n+1}(\mathcal{F}^{n+1}, \langle \hat{C} \rangle^{n+1}) + (1 - \theta) G_i^n(\mathcal{F}^n, \langle \hat{C} \rangle^{n+1}) = 0, \quad (30)$$

waarbij θ de impliciteitsparameter is met $0 \leq \theta \leq 1$ en

$\theta = 0,$	forward Euler schema,	expliciet,	$\mathcal{O}(\Delta t),$
$\theta = 0.5,$	Crank–Nicolson schema,	impliciet,	$\mathcal{O}(\Delta t)^2,$
$\theta = 1,$	backward Euler schema,	impliciet,	$\mathcal{O}(\Delta t).$

Hier geeft de \mathcal{O} -notatie de orde van de fout weer. Verder is G de laatste term aan de linkerzijde van Vgl. (27). Doordat de randvoorwaarde van Vgl. (27) wordt opgelegd aan de landwaartse rand, kiezen we voor een tweede-orde upwind schema voor ruimtelijke discretisatie. Hierbij wordt op het één-na-laatste roosterpunt ($i = I - 1$) een tweede-orde, centraal-differentie schema gebruikt. Voor de ruimtelijke roosterpunten $i = 0 \dots I$ geldt nu:

voor $i = 0 \dots I - 2$:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_i^{n+1} - \frac{\langle \hat{C} \rangle_i^n}{\langle \hat{C} \rangle_i^{n+1}} \tilde{S}_i^n + \frac{\theta \Delta t}{\langle \hat{C} \rangle_i^{n+1}} \left(\frac{-3\mathcal{F}_i^{n+1} + 4\mathcal{F}_{i+1}^{n+1} - \mathcal{F}_{i+2}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{B_{x_i}}{B_i} \mathcal{F}_i^{n+1} \right) \\ + \frac{(1 - \theta) \Delta t}{\langle \hat{C} \rangle_i^{n+1}} \left(\frac{-3\mathcal{F}_i^n + 4\mathcal{F}_{i+1}^n - \mathcal{F}_{i+2}^n}{2\Delta x} + \frac{B_{x_i}}{B_i} \mathcal{F}_i^n \right) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

voor $i = I - 1$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_{I-1}^{n+1} - \frac{\langle \hat{C} \rangle_{I-1}^n}{\langle \hat{C} \rangle_{I-1}^{n+1}} \tilde{\mathcal{S}}_{I-1}^n + \frac{\theta \Delta t}{\langle \hat{C} \rangle_{I-1}^{n+1}} \left(\frac{-\mathcal{F}_{I-2}^{n+1} + \mathcal{F}_I^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{B_{x_{I-1}}}{B_{I-1}} \mathcal{F}_{I-1}^{n+1} \right) \\ + \frac{(1-\theta)\Delta t}{\langle \hat{C} \rangle_{I-1}^{n+1}} \left(\frac{\mathcal{F}_{I-2}^n + \mathcal{F}_I^n}{2\Delta x} + \frac{B_{x_{I-1}}}{B_{I-1}} \mathcal{F}_{I-1}^n \right) = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

voor $i = I$, randvoorwaarde landzijde:

$$\mathcal{F}_I^{n+1} + \mathcal{F}_{\text{rivier}} = 0. \quad (33)$$

3.2.2 Sedimenttransport

De vergelijking voor het sedimenttransport, Vgl. (28), heeft geen tijdsafhankelijkheid en wordt daardoor alleen in de ruimte gediscretiseerd. Voor deze vergelijking wordt er aan de zeewaartse rand een concentratie c_{zee} opgelegd die uitgedrukt is in f_{zee} (zie Vgl. 23), waardoor we een tweede-orde backward Euler schema toepassen voor ruimtelijke discretisatie. In het eerste roosterpunt gebruiken we een tweede-orde, centraal-differentie schema. Voor de ruimtelijke roosterpunten $i = 0 \dots I$ geldt nu:

voor $i = 0$, randvoorwaarde zeezijde:

$$f_0^{n+1} - f_{\text{zee}} = 0. \quad (34)$$

voor $i = 1$:

$$\mathcal{F}_1^{n+1} - T_1^{n+1} f_1^{n+1} - F_1^{n+1} \left(\frac{-f_0^{n+1} + f_2^{n+1}}{2\Delta x} \right) = 0. \quad (35)$$

voor $i = 2 \dots I$:

$$\mathcal{F}_i^{n+1} - T_i^{n+1} f_i^{n+1} - F_i^{n+1} \left(\frac{f_{i-2}^{n+1} - 4f_{i-1}^{n+1} + 3f_i^{n+1}}{2\Delta x} \right) = 0. \quad (36)$$

3.3 Oplossen van de modelvergelijkingen

Om het stelsel van modelvergelijkingen (27)-(29) op te lossen wanneer een impliciete discretisatiemethode wordt ingezet, maken we gebruik van de numerieke iteratiemethode van Newton–Raphson. In verkorte notatie ziet deze er als volgt uit:

$$\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n - \frac{\mathbf{Y}(\mathbf{X}^{n+1})}{\mathbf{J}}. \quad (37)$$

Hierbij is $\mathbf{X} = [\tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{F}, f]$ de oplossingsvector, $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ is een vector van de gediscretiseerde modelvergelijkingen voor de sedimentvoorraad en -transport, Vgl. (31)-(36), en de algebraïsche vergelijking voor de erodeerbaarheid, Vgl. (29), en $\mathbf{J} = \partial \mathbf{Y} / \partial \mathbf{X}$ is de Jacobiaan van de modelvergelijkingen. Voor de structuur en de elementen van de Jacobiaan wordt verwezen naar Appendix B3.

Dit algoritme convergeert onder gunstige omstandigheden vrij snel, namelijk kwadratisch: de fout na de $n+1$ -de iteratie is evenredig met het kwadraat van de fout na de n -de iteratie.

3.4 Numerieke aspecten

3.4.1 Stabiliteit van de numerieke methode

De stabiliteit van een numerieke methode kan worden geanalyseerd door te kijken naar de testvergelijking

$$y' = ky, \quad \text{met} \quad y(0) = y_0, \quad (38)$$

waarbij $k \in \mathbb{C}$. De oplossing van deze vergelijking is $y(t) = e^{kt}$. Deze oplossing gaat naar nul als $t \rightarrow \infty$ en $\Re(k) < 0$ en groeit temporeel als $\Re(k) > 0$. Voor de hierboven beschreven numerieke methodes neemt Vgl. (38) de vorm

$$y_{n+1} = \phi(hk) \cdot y_n, \quad (39)$$

aan, die met behulp van de initiële conditie geschreven kan worden als

$$y_n = (\phi(hk))^n \cdot y_0. \quad (40)$$

De functie $\phi(z)$, met $z = kh$, wordt de *stabiliteitsfunctie* genoemd. De conditie dat $y_n \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$ is dus equivalent aan $|\phi(z)| < 1$. De (complexe) waarden van z waarvoor dit geldt wordt de *regio van absolute stabiliteit* genoemd (Ascher en Greif, 2011), deze verzameling is dus gedefinieerd als:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\phi(z)| < 1\}. \quad (41)$$

Als deze conditie geldt voor alle z in het linker halfvlak, dat wil zeggen

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0\}, \quad (42)$$

dan wordt de numerieke methode *A-stabiel* genoemd. Als de methode naast A-stabiliteit ook voldoet aan de strengere eis

$$|\phi(z)| \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad z \rightarrow \infty, \quad (43)$$

dan is de methode ook *L-stabiel*. Een manier waarop het verschil tussen A- en L-stabiliteit zich kan openbaren is bij gebruik van een grotere tijdstap. Bij een A-stabiel schema treden dan vaak temporele oscillaties op die bij een L-stabiel schema niet zullen voorkomen.

3.4.1.1 Forward Euler methode

De expliciete forward Euler methode toegepast op Vgl. (38) is

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + h(ky_n) = (1 + hk)y_n. \quad (44)$$

Gebruikmakend van de initiële conditie, levert dit dus $y_n = (1 + hk)^n \cdot y_0$ op, met $\phi(z) = 1 + z$. De regio van absolute stabiliteit is dus $\{z \in \mathbb{C} \mid |1 + z| < 1\}$ en is de grijze cirkel weergegeven in Fig. 3a. De forward Euler methode is niet A-stabiel en dus ook niet L-stabiel.

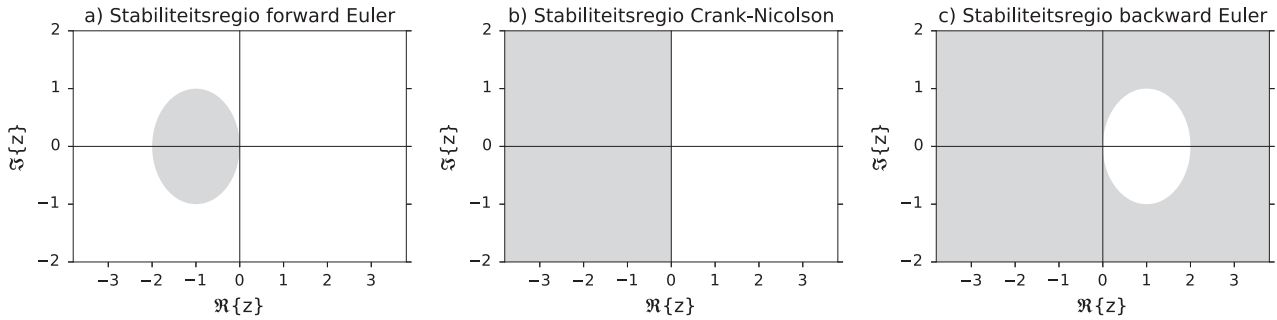
3.4.1.2 Crank–Nicolson methode

De Crank–Nicolson methode toegepast op Vgl. (38) is

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})) = y_n + \frac{1}{2}h(ky_n + ky_{n+1}). \quad (45)$$

Lossen we dit op voor y_{n+1} , dan leidt dit tot

$$y_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{2}hk}{1 - \frac{1}{2}hk} y_n. \quad (46)$$



Figuur 3 – Regio van absolute stabiliteit voor a) forward Euler, b) Crank–Nicolson en c) backward Euler.

De stabiliteitsfunctie is dus

$$\phi(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z}{1 - \frac{1}{2}z}, \quad (47)$$

en de regio van absolute stabiliteit is

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{1 + \frac{1}{2}z}{1 - \frac{1}{2}z} \right| < 1 \right\}. \quad (48)$$

Dit gebied bestrijkt het linker halfvlak van de complex ruimte (zie Fig. 3b). Hierdoor is de Crank–Nicolson methode A-stabiel. Echter, deze methode vertoont niet altijd het gewenste gedrag: het dempt wel alle afnemende componenten, maar snel afnemende componenten worden maar heel licht gedempt, omdat $\phi(z) \rightarrow 1$ als $z \rightarrow \infty$. De methode is dus niet L-stabiel.

3.4.1.3 Backward Euler methode

De impliciete backward Euler methode toegepast op Vgl. (38) is

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + hky_{n+1}. \quad (49)$$

Lossen we dit op voor y_{n+1} , dan leidt dit tot

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - hk} y_n. \quad (50)$$

De stabiliteitsfunctie is dus

$$\phi(z) = \frac{1}{1 - z}, \quad (51)$$

en de regio van absolute stabiliteit is

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{1}{1 - z} \right| < 1 \right\}. \quad (52)$$

Deze regio in de complexe ruimte ligt buiten de cirkel met straal 1 en gecentreerd rond $(\Re\{z\}, \Im\{z\}) = (1, 0)$, zie Fig. 3c. De backward Euler methode is dus A-stabiel. Bovendien is deze methode L-stabiel, omdat $1/(1 - z) \rightarrow 0$ als $z \rightarrow \infty$.

3.4.2 Nauwkeurigheid van de numerieke oplossing

Om de nauwkeurigheid van de numerieke oplossing te testen, maken we gebruik van fout- en convergentie-analyses. Hierbij nemen we de oplossing van de relatieve erodeerbaarheid, f , als maat voor de oplossing van het gehele probleem. In navolging van Kumar *e.a.*, 2016, definiëren we de foutfunctie E_h als

$$E_h = f_e - f_h, \quad (53)$$

waarbij f_e de exacte oplossing van f voorstelt en f_h de numerieke oplossing is voor een bepaalde stapgrootte h in tijd of ruimte. De numerieke oplossing f_h convergeert naar de exacte oplossing f_e als de L^2 norm van E_h naar nul gaat, i.e.

$$\|E_h\|_2 = \sqrt{\frac{1}{P} \int_0^P \frac{1}{L} \int_0^L E_h^2 dx dt} \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad h \rightarrow 0. \quad (54)$$

Hierbij is P de tijdsperiode van de simulatie en L de lengte van het estuarium. Om de foutmaat onafhankelijk te maken van de grootte van het domein en de range van de oplossing, definiëren we de relatieve fout als

$$r(h) = \frac{\|E_h\|_2}{\|f_e\|_2}. \quad (55)$$

De orde van convergentie p is de snelheid waarmee de numerieke oplossing f_h convergeert naar de exacte oplossing f_e , welke is gegeven door

$$p = \frac{\log(\|E_{h_{\text{new}}}\|_2 / \|E_{h_{\text{old}}}\|_2)}{\log(h_{\text{new}} / h_{\text{old}})}. \quad (56)$$

4 Invoerfile voor de tijdsintegrator in iFlow

Het model dat in de vorige twee hoofdstukken is gepresenteerd, is in het iFlow modelpakket v2.4 dusdanig geïmplementeerd dat een tijdsvariërende rivierafvoer op de stroomopwaartse rand kan worden opgelegd. Implementatie van tijdsvariatie van de randvoorwaarde op de zeewaartse rand is voorbehouden voor een volgende pakketversie. iFlow wordt aangestuurd middels een overzichtelijke invoerfile. Hierin worden alle door de gebruiker opgegeven modules opgenomen, inclusief de benodigde invoergegevens. Figuur 4 geeft het gedeelte van de invoerfile weer dat de sedimentmodule aanstuurt en welke gebruikt is voor het genereren van de resultaten in Hoofdstuk 5. Het overige gedeelte van de invoerfile is opgenomen in Appendix B2 en wordt hier verder niet besproken.

```
## Sediment ##
module      semi_analytical2DV.SedDynamic
            semi_analytical2DV.DynamicAvailability_upwind

astar       1
ws          2.e-3
Kh          100
submodules  erosion sedadv noflux

## Dynamic Erodibility ##
dt          24*3600.
t           np.arange(0, 366*24*3600, self.dt)
Q           60.*np.ones(len(self.t))
finit       self.FSEA*(1-self.x/self.L)**2
Mhat        2.e-5
csea        4.e-2
tol         1.e-10
Friver      0.
concept     stock exact
theta       1.
```

Figuur 4 – Gedeelte van de invoerfile voor iFlow dat de sedimentmodules aanstuurt.

Onder de kop 'Sediment' worden de sedimentmodule en de tijdsintegratiemodule aangeroepen via respectievelijk `semi_analytical2DV.SedDynamic` en `semi_analytical2DV.DynamicAvailability_upwind`. Voor de sedimentmodule zijn de benodigde invoergegevens als volgt: de domeingemiddelde beschikbaarheid a^* , de valsnelheid w_s (m s^{-1}) en de horizontale diffusiecoëfficiënt K_h ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$). Let op dat a^* in de huidige modelbeschrijving niet meer van belang is en kan daarom op 1 gesteld worden (deze parameter is een kalibratieparameter binnen het model van Chernetsky *e.a.*, 2010). Als laatste moet worden aangegeven welke submodules (i.e. fysische processen) iFlow moet meenemen in de berekening. In dit geval worden sedimentconcentraties meegenomen als gevolg van erosie aan de bodem, sediment advectie en een no-flux term. Deze laatste term is een correctieterm voor het feit dat er geen sedimenttransport door het wateroppervlakte gaat, maar dat het tijdsafhankelijke wateroppervlakte op $z = 0$ is gedefinieerd in plaats van op de daadwerkelijke oppervlakte $z = \zeta$ (voor meer informatie zie Dijkstra *e.a.*, 2017).

Onder de kop 'Dynamic Erodibility' worden de invoerparameters voor de tijdsintegratiemodule weergegeven. Hierin wordt allereerst de tijdserie voor de rivierafvoer opgebouwd. Het aangeven van de tijdstap Δt waarmee iFlow door de tijdsintegrator loopt is een noodzakelijkheid. De tijdserie voor de rivierafvoer kan vervolgens op twee manieren worden ingegeven: 1) door een tijdserie via een bestand in te laden of 2) door een tijdserie te construeren door middel van standaard python pakketten. In het eerste geval moet de gebruiker de locatie van het (tekst-)bestand opgeven dat door iFlow kan worden ingelezen. Deze optie wordt hier verder niet besproken. Een voorbeeld van het tweede geval is weergegeven in Fig. 4). Hier is het python pakket `numpy`

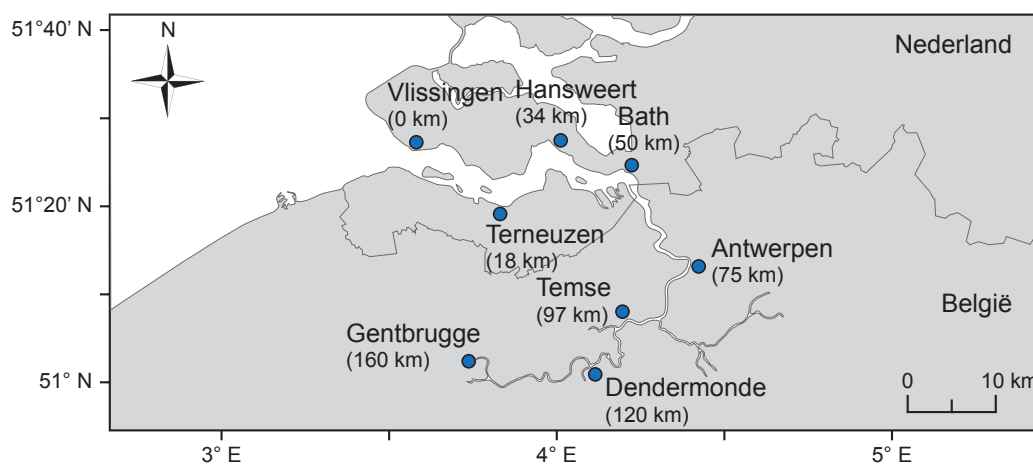
gebruikt om een rivierafvoer van een jaar te construeren met een constante waarden van $60 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ (deze invoer wordt gebruikt in het volgende hoofdstuk). In het onderhevige geval is het dan nodig om ook een tijdsverloop, t , op te geven.

Vervolgens worden andere noodzakelijke parameters opgevoerd: de initiële conditie voor de relatieve erodeerbaarheid, f_{init} ; de erosieparameter, \hat{M} ; de dieptegemiddelde sedimentconcentratie aan de zeewaartse rand, c_{zee} ; de tolerantie van de Newton–Raphson iteratie, tol ; het sedimenttransport vanuit de rivier door de stroomopwaartse rand, $\mathcal{F}_{\text{rivier}}$; de gebruikte methode voor de dynamische beschikbaarheid (op dit moment kan hier alleen de variant 'stock exact' worden gebruikt); en de impliciteitsparameter, θ , die aangeeft welke discretisatieschema gebruikt wordt (in dit geval backward Euler met $\theta = 1$).

5 Modelresultaten

5.1 Model voor de Schelde

Om het model voor tijdsintegratie te analyseren volgens de methodiek hierboven beschreven, wordt ter illustratie parameterwaarden gebruikt die karakteristiek zijn voor de Schelde. In grote lijnen is de modelopzet identiek aan het model in Rapport 1.5. Het modeldomein bevat de Wester- en Zeeschelde tussen Vlissingen en Gentbrugge (zie Fig. 5), dit gebied heeft een lengte L van 160 km. De breedte $B(x)$ en breedtegemiddelde diepteligging $H(x)$ zijn identiek aan de geometrie die in Rapport 1.5 zijn gebruikt, en zijn verkregen door de schematisatie van het 2DH-model van Coen *e.a.* (2016) te benaderen door gladde fits.



Figuur 5 – Het Schelde estuarium.

De parameterwaarden die voor het Scheldemodel zijn gebruikt zijn samengevat in Tabel 1. Het model is gekalibreerd op M_2 - en M_4 -waterstanden door de waarden van de verticale turbulente viscositeit A_v en hydraulische ruwheid s_f te optimaliseren (zie Rapport 1.3 voor details). In navolging van Coen *e.a.*, 2016 is de standaardwaarde van de valsnelheid van sediment op 2 mm s^{-1} gezet. Merk op dat Coen *e.a.*, 2016 ook een sedimentfractie met $w_s = 0.2 \text{ mm s}^{-1}$ beschouwen die hier niet wordt meegenomen. Verder wordt op de zee-waartse rand een getij- en diepte-gemiddelde sedimentconcentratie, c_{zee} , van 40 mg l^{-1} voorgeschreven en op de landwaartse rand veronderstellen we dat er geen sedimenttransport vanuit de rivier komt ($\mathcal{F}_{rivier} = 0$). Om er voor te zorgen dat een morfodynamisch evenwicht zich kan instellen wordt er een relatief hoge, constante waarde voor de rivierafvoer gebruikt van $60 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ gedurende een periode van 1 jaar. Aangezien er geen analytische oplossing is voor Vgln. (27)-(29) wordt er verondersteld dat de (quasi-)exacte oplossing van de relatieve erodeerbaarheid, f_e , verkregen wordt door het tweede orde nauwkeurige Crank–Nicolson schema ($\theta = 0.5$) te gebruiken met een tijdstap $\Delta t = 3420 \text{ s}$ en een ruimtelijke stap $\Delta x = 400 \text{ m}$.

5.2 Gevoeligheid voor het schema voor tijdsintegratie

De formulering van het discretisatieschema, Sectie 3.2, laat het toe om drie verschillende methodes te gebruiken voor het oplossen van het systeem van vergelijkingen, namelijk het expliciete Forward Euler (FE) schema

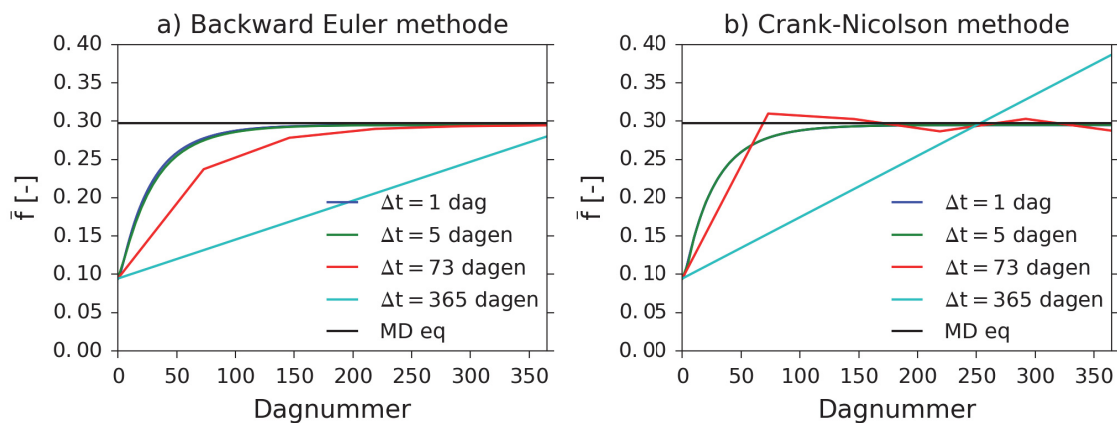
Tabel 1 – Standaard parameterwaarden van het gekalibreerde Scheldemodel.

Parameter	Waarde	Parameter	Waarde
L	160 km	$A_{v0} = K_{v0}$	$0.0367 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
A_{M_2}	1.77 m	s_f	0.0048 m s^{-1}
A_{M_4}	0.14 m	K_h	$100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
φ	-1.3°	w_s	2 mm s^{-1}
c_{zee}	40 mg l^{-1}	\hat{M}	$2 \cdot 10^{-5}$
\mathcal{F}_{rivier}	0	Q	$60 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$

en de impliciete Backward Euler (BE) en Crank–Nicolson (CN) schema’s. Aangezien in Sectie 3.4 bepaald was dat de FE methode niet A-stabiel is, concentreren we ons hier op de twee impliciete methodes.

5.2.1 Stabiliteit

Modelresultaten voor de tijdsevolutie van de gemiddelde relatieve erodeerbaarheid, \bar{f} , voor 400 ruimtestappen (of $\Delta x = 400 \text{ m}$) en verschillende tijdstappen gedurende een jaar met constante afvoer van $60 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ zijn weergegeven in Fig. 6. Het blijkt dat voor alle tijdstappen de oplossing voor zowel BE als CN convergeert naar de waarde die hoort bij het morfodynamisch evenwicht, Eq. (26). Voor de BE methode zien we dat voor een grote tijdstap van 1 jaar (Fig. 6a, turquoise lijn) de oplossing zelfs nagenoeg direct naar de eindoplossing convergeert; dit is een kenmerk van L-stabiliteit. Voor de CN methode valt juist op dat er voor grotere tijdstappen oscillaties optreden (Fig. 6a, rode en turquoise lijn). Aangezien de CN methode A-stabiel is, dempen deze oscillaties langzaam uit (niet weergegeven i.v.m. een te korte simulatietijd). De oscillaties treden op wanneer de verhouding van de tijdstap ten opzichte van de ruimtelijke stap te groot is. Voor de 1D warmtevergelijking geldt bijvoorbeeld dat numerieke stabiliteit gewaarborgd is als $\alpha \Delta t / \Delta x^2 \leq 1/2$, waarbij α de warmtediffusiviteit is.

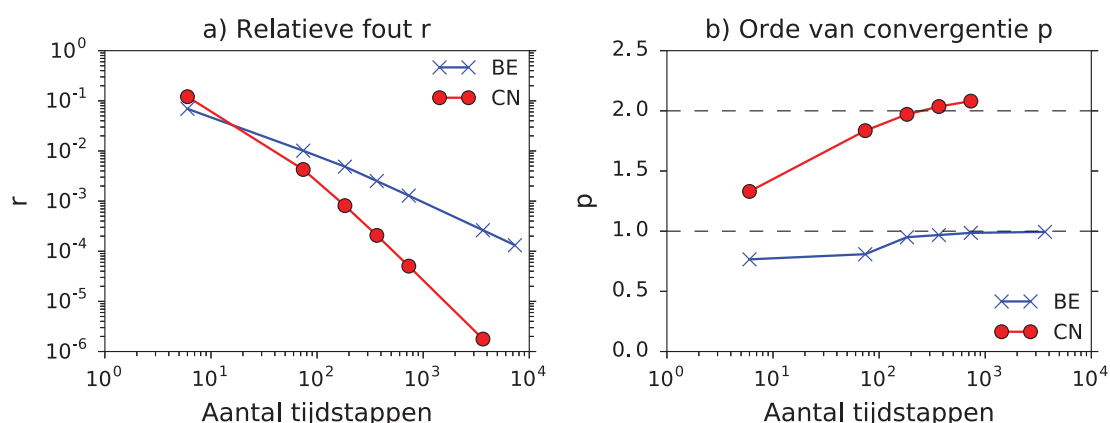


Figuur 6 – Tijdsevolutie van \bar{f} als functie van de tijdstap Δt voor (a) de backward Euler methode en (b) de Crank–Nicolson methode.

5.2.2 Nauwkeurigheid

Als we de nauwkeurigheid van beide methodes bekijken voor een vast aantal ruimtestappen van 400, dan zien we dat over het algemeen de CN methode een kleinere fout maakt (Fig. 7a). Bij 3650 tijdstappen ($\Delta t = 1/10 \text{ dag}$) is het verschil in nauwkeurigheid gegroeid tot 3 ordes van grootte. Alleen voor een klein aantal

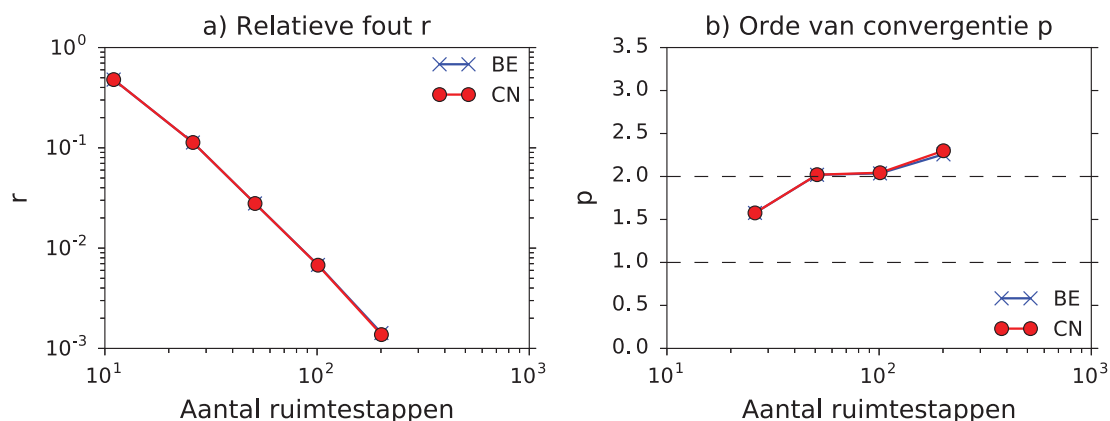
tijdstappen (5 tijdstappen of $\Delta t = 73$ dagen) is de BE methode marginaal nauwkeuriger. Dit wordt veroorzaakt door de oscillaties die optreden bij de CN methode als de verhouding van de tijdstap ten opzichte van de ruimtestap te groot wordt (zie ook Fig. 6). Bovendien convergeert de fout voor de CN methode, $p \rightarrow 2$, sneller naar de exacte oplossing dan de BE methode, $p \rightarrow 1$ (Fig. 7b). Dit is conform de vooraf bekende orde van nauwkeurigheid van Δt en Δt^2 voor respectievelijk de BE en CN methode (zie Sectie 3.2.1). De reden dat de orde van convergentie voor de CN methode boven 2 uitkomt, is toe te schrijven aan de keuze voor de (quasi-)exacte oplossing. Aangezien deze niet geheel exact is, zal hoe dicht de berekende oplossing komt bij deze quasi-exacte oplossing, de berekende orde van convergentie afwijken van de verwachte waarde van 2.



Figuur 7 – (a) relatieve fout en (b) orde van convergentie als functie van het aantal tijdstappen voor de backward Euler (blauwe lijn) de Crank–Nicolson methode (rode lijn).

5.3 Nauwkeurigheid van het ruimtelijk schema

Zoals vermeld in Sectie 3.2 maken we voor de ruimtelijke discretisatie gebruik van tweede orde upwind en downwind schema's, onafhankelijk van de methode voor tijdsintegratie. Beide methodes geven bij gelijkblijvende tijdstap $\Delta t = 1/500$ dag zoals verwacht dezelfde relatieve fout r als functie van de ruimtestap (zie Fig. 8a). Bovendien gaat de orde van convergentie voor beide methodes naar 2 tot en met 200 ruimtestappen (zie Fig. 8b). Voor verder toenemende aantal ruimtestappen loopt de orde van convergentie op in verband met de eerder genoemde keuze voor de quasi-exacte oplossing.

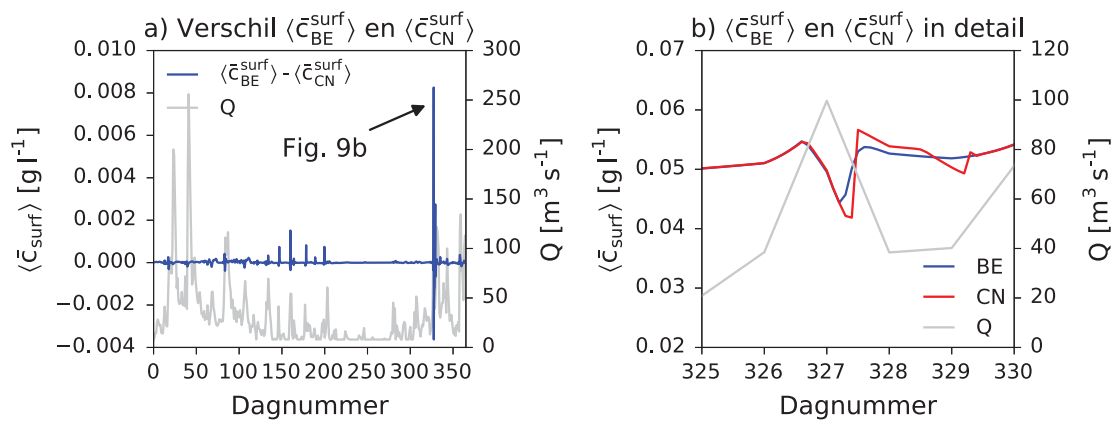


Figuur 8 – (a) relatieve fout en (b) orde van convergentie als functie van het aantal ruimtestappen voor de backward Euler (blauwe lijn) de Crank–Nicolson methode (rode lijn).

5.4 Berekening met dagwaarden van de rivierafvoer te Melle

In deze sectie wordt onderzocht hoe de BE en CN methodes zich handhaven voor een realistische tijdserie voor de rivierafvoer. Hiertoe nemen we de dagwaarden van de rivierafvoer te Melle van het jaar 2009 (zie Fig. 9a, grijze lijn). De minimale rivierafvoer is hierbij op $8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ gesteld. Vervolgens zijn de lengte-gemiddelde oppervlakteconcentraties berekend met de BE en CN methode voor $\Delta t = 1/10$ dag en $\Delta x = 1600 \text{ m}$.

Modelresultaten voor de tijdsevolutie van het verschil tussen de lengte-gemiddelde oppervlakteconcentraties voor de BE methode, $\bar{c}_{BE}^{\text{surf}}$, en de CN methode, $\bar{c}_{CN}^{\text{surf}}$, laten zien dat voor een groot gedeelte beide oplossingen dicht bij elkaar liggen (Fig. 9a, blauwe lijn). Echter, wanneer tijdens een periode van relatieve lage rivierafvoer een piek met relatieve hoge rivierafvoer voorkomt, blijken beide oplossingen significant te verschillen tot maximaal ongeveer 8 mg l^{-1} . Voorbeelden hiervan zijn de vier gebeurtenissen tussen dagnummer 150 en 200 en de extreme gebeurtenis rond dagnummer 325. Bekijken we laatstgenoemde extreme gebeurtenis in detail (Fig. 9b), dan zien we dat de CN methode sterker reageert op de plotselinge verandering in Q dan de BE methode. Direct na de afvoerpiek van $100 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ neemt de oppervlakteconcentratie voor de BE methode af op een relatief gladde manier om zich vervolgens te herstellen als de rivierafvoer tot $40 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ is gedaald. Voor de CN methode neemt de oppervlakteconcentratie sterker af en herstelt zich tot een hogere oppervlakteconcentratie, wat suggereert dat de CN methode de eigenlijke oplossing voorbij schiet. Dit oscillerende gedrag van de CN methode zagen we al eerder in Fig. 6b en is een direct gevolg van het feit dat deze methode niet L-stabiel is.



Figuur 9 – (a) Verschil tussen $\langle \bar{c}_{BE}^{\text{surf}} \rangle$ en $\langle \bar{c}_{CN}^{\text{surf}} \rangle$ voor de rivierafvoer van de Schelde in het jaar 2009 en (b) detail van $\langle \bar{c}_{BE}^{\text{surf}} \rangle$ en $\langle \bar{c}_{CN}^{\text{surf}} \rangle$ voor het geprononceerde verschil in Fig. 9a tussen dagnummer 325 en 330.

Aangezien de resultaten voor beide methodes erg dicht bij elkaar liggen, behalve voor plotselinge significante veranderingen in de rivierafvoer, raden we voor situaties met realistische rivierafvoer de BE methode aan.

6 Samenvatting en conclusies

De technische specificaties van de tijdsintegrator die gebruikt is in onder andere Rapport 1.5 om meer inzicht te krijgen in de tijdsevolutie van de sedimentdistributie in estuaria, zijn als volgt:

1. De tijdsintegrator staat het toe om drie verschillende methodes te gebruiken voor het discretiseren van de modelvergelijkingen in de tijd:
 - a. De expliciete Forward Euler methode
 - b. De impliciete Crank–Nicolson methode
 - c. De impliciete Backward Euler methode
2. Voor de ruimtelijke discretisatie van de modelvergelijkingen wordt gebruik gemaakt van tweede orde upwind en downwind methodes.
3. Wanneer gebruik wordt gemaakt van een impliciete discretisatiemethode wordt een iteratieve Newton–Raphson methode ingezet om de numerieke oplossing uit te rekenen.

Wat betreft de prestaties van de verschillende methodes voor tijdsintegratie kan het volgende worden geconcludeerd:

1. Doordat de expliciete Forward Euler methode niet absoluut of A-stabiel is en dus significante beperkingen met zich meebrengt ten aanzien van de keuze voor de tijd- en ruimtestap, wordt deze methode in dit rapport verder niet beschouwd.
2. De impliciete Crank–Nicolson methode is A-stabiel en tweede orde nauwkeurig. Echter doordat de methode niet L-stabiel is, kunnen ongewenste oscillaties optreden wanneer de verhouding van de tijdstap ten opzichte van de ruimtestap te groot wordt.
3. De impliciete Backward Euler methode is zowel A- als L-stabiel en eerste orde nauwkeurig.
4. Ondanks dat de Backward Euler methode een lagere orde van nauwkeurigheid heeft dan de Crank–Nicolson methode, blijkt de eerste methode voor de toepassing op de Schelde de betere methode. Dit heeft te maken met het feit dat wanneer (sterk) fluctuerende dagwaarden van de rivierafvoer worden gebruikt de Backward Euler methode stabiel is, terwijl dit met de Crank-Nicolson methode leidt tot ongewenste oscillaties. In het bijzonder wanneer er plotselinge extreme gebeurtenissen plaatsvinden, zoals bijvoorbeeld een hoogwatergolf.

Referenties

- Ascher, U. M.; Greif, C.** (2011). A First Course in Numerical Methods. Society for Industrial and Applied Mathematics: Philadelphia, PA. eprint: <https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/9780898719987>
- Brouwer, R. L.; Schramkowski, G. P.** (2024). Geïdealiseerde processtudie van systeemovergangen naar hypertroebelheid. WP 1.5 Sedimentmodel met dynamische beschikbaarheid. Versie 4.0. *WL Rapporten*, 13_103_6. Waterbouwkundig Laboratorium: Antwerpen, België
- Brouwer, R. L.; Schramkowski, G. P.; Verwaest, T.; Mostaert, F.** (2017). Geïdealiseerde processtudie van systeemovergangen naar hypertroebelheid. WP 1.3 Basismodel getij en zout. Versie 2.0. *WL Rapporten*, 13_103_3. Waterbouwkundig Laboratorium: Antwerpen, België
- Brouwer, R. L.; Schramkowski, G. P.; Verwaest, T.; Mostaert, F.** (2022). Geïdealiseerde processtudie van systeemovergangen naar hypertroebelheid. WP 1.4 Basismodel sediment. Versie 4.0. *WL Rapporten*, 13_103_5. Waterbouwkundig Laboratorium: Antwerpen, België
- Brouwer, R. L.; Schramkowski, G. P.; Dijkstra, Y. M.; Schuttelaars, H. M.** (2018). Time Evolution of Estuarine Turbidity Maxima in Well-Mixed, Tidally Dominated Estuaries: The Role of Availability- and Erosion-Limited Conditions. *Journal of Physical Oceanography* 48 (8): 1629–1650 pp. DOI: 10.1175/JPO-D-17-0183.1. eprint: <https://doi.org/10.1175/JPO-D-17-0183.1>
- Chernetsky, A. S.** (2012). Trapping of sediment in tidal estuaries. (phdthesis). Delft University of Technology
- Chernetsky, A. S.; Schuttelaars, H. M.; Talke, S. A.** (2010). The effect of tidal asymmetry and temporal settling lag on sediment trapping in tidal estuaries. *Ocean Dynamics* 60 (5): 1219–1241 pp. DOI: 10.1007/s10236-010-0329-8
- Coen, L.; De Maerschalck, B.; Plancke, Y.; Verwaest, T.; Mostaert, F.** (2016). Sedimentstrategie Beneden-Zeeschelde. Deelrapport 1 – Opzet en validatie slibmodel. Versie 4.0. *WL Rapporten*, 14_025. Waterbouwkundig Laboratorium: Antwerpen, België
- Dijkstra, Y. M.** (2022). Investigation into the non-linear hydrodynamical processes in the Scheldt River. Version 4.0. *FHR Reports*, 15_039_1. Flanders Hydraulics Research: Antwerp, Belgium
- Dijkstra, Y. M.; Brouwer, R. L.; Schuttelaars, H. M.; Schramkowski, G. P.** (2017). The iFlow Modelling Framework v2.4. A modular idealised process-based model for flow and transport in estuaries. *Geoscientific Model Development Discussions* 10 (7): 2691–2713 pp. DOI: 10.5194/gmd-2017-20
- Friedrichs, C. T.; Armbrust, B. D.; De Swart, H. E.** (1998). Hydrodynamics and equilibrium sediment dynamics of shallow, funnel-shaped tidal estuaries. *in*: Dronkers, J.; Scheffers, M. (Eds.). *Physics of Estuaries and Coastal Seas*. PECS 1996. Balkema: Rotterdam. 337–343 pp.
- Huijts, K. M. H.; Schuttelaars, H. M.; Swart, H. E. de; Valle-Levinson, A.** (2006). Lateral trapping of sediment in tidal estuaries: an idealized model. *J. Geophys. Res.* 111: doi:10.1029/2005JF000312 pp.
- Kumar, M.; Schuttelaars, H. M.; Roos, P. C.; Möller, M.** (2016). Three-dimensional semi-idealized model for tidal motion in tidal estuaries. *Ocean Dynamics* 66 (1): 99–118 pp. DOI: 10.1007/s10236-015-0903-1

Sanford, L.; Maa, J.-Y. (2001). A unified erosion formulation for fine sediments. *Marine Geology 1-2 (179)*: 9–23 pp. DOI: 10.1016/S0025-3227(01)00201-8.

B1 Afleiding evolutie sedimentvoorraad

In deze appendix wordt de vergelijking voor de evolutie van de totale, getij-gemiddelde sedimentvoorraad (Vgl. 20) afgeleid. De vergelijking voor de bodemevolutie (Vgl. 11) dient hiervoor te worden aangevuld met een vergelijking voor de tijdsevolutie van de concentratie in de waterkolom. Hiertoe starten we bij de concentratievergelijking (5) die we integreren over de breedte. Aangezien deze vergelijking al breedte-gemiddeld is, volstaat een vermenigvuldiging met de breedte B . Dit resulteert in

$$Bc_t + Buc_x + Bwc_z = B(w_s c + K_v c_z)_z + (BK_h c_x)_x. \quad (57)$$

Vervolgens kunnen we een relatie tussen erosie en depositie afleiden door Eq. (57) over de diepte te integreren en de Leibniz-regel voor integratie te gebruiken

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-H}^{\zeta} Bc \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-H}^{\zeta} Buc \, dz - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-H}^{\zeta} BK_h c_x \, dz = -B \underbrace{(w_s c + K_h c_x H_x + K_v c_z)_{z=-H}}_I + \\ Bc \underbrace{(\zeta_t + u - w)_{z=\zeta}}_{II} + Bc \underbrace{(uH_x + w)_{z=-H}}_{III} + B \underbrace{(w_s c - K_h c_x \zeta_x + K_v c_z)_{z=\zeta}}_{IV}. \end{aligned} \quad (58)$$

De termen II, III en IV kunnen geëlimineerd worden door gebruik te maken van de randvoorwaarden

$$w = \zeta_t + u\zeta_x \quad \text{at} \quad z = \zeta, \quad (59)$$

$$w = -uH_x \quad \text{at} \quad z = -H, \quad (60)$$

$$-w_s c - K_v c_z + K_h c_x \zeta_x = 0 \quad \text{at} \quad z = \zeta. \quad (61)$$

Term I kan uitgedrukt worden als depositie minus erosie of $-B(D - E)$. Derhalve reduceert Vgl. (58) tot

$$B \frac{\partial}{\partial t} \int_{-H}^{\zeta} c \, dz + \frac{\partial}{\partial x} B \int_{-H}^{\zeta} (uc - K_h c_x) \, dz = B(-D + E). \quad (62)$$

Wanneer we Vgl. (62) over een getijperiode middelen dan resulteert dat in

$$B \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \int_{-H}^{\zeta} c \, dz \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x} \left(B \left\langle \int_{-H}^{\zeta} (uc - K_h c_x) \, dz \right\rangle \right) = B(-D + E). \quad (63)$$

Aangezien c zowel op de korte, getij-tijdschaal alsook op de lange tijdschaal (via de erodeerbaarheid) varieert, is de eerste term aan de linkerkant van Vgl. (63) ongelijk aan nul. Deze term representeert de evolutie in tijd van de totale, getijgemiddelde hoeveelheid sediment in suspensie, \mathcal{S}_{sus} . De tweede term aan de linkerkant van Vgl. (63) stelt de divergentie van het getij-gemiddelde sedimenttransport, $B\mathcal{F}$, voor. Gebruikmakend van de hiervoor geïntroduceerde variabelen, reduceert Vgl. (63) tot

$$B(\mathcal{S}_{\text{sus}})_t = -\frac{\partial}{\partial x}(B\mathcal{F}) + B(-D + E). \quad (64)$$

In sectie 2.5 is de tijdsevolutievergelijking voor de bodempeel gedefinieerd als,

$$B(\mathcal{S}_{\text{bed}})_t = B(D - E), \quad (65)$$

die samen met de Vgl. (64) resulteert in de tijdsevolutievergelijking voor de totale, getij-gemiddelde sedimentvoorraad, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{sus}} + \mathcal{S}_{\text{bed}}$,

$$B\mathcal{S}_t = -(B\mathcal{F})_x. \quad (66)$$

Hierbij valt op dat de term die het verschil van erosie en depositie weergeeft in Vgl. (64) en (65) tegengesteld zijn en dus niet meer voorkomen in Vgl. (66).

B2 Invoerfile iFlow

```
#####  
##                               Invoerfile WP61                               ##  
#####  
  
## Grid ##  
module numerical2DV.RegularGrid  
xgrid equidistant 25  
zgrid equidistant 50  
fgrid integer 2  
  
## Geometry ##  
module analytical2DV.Geometry2DV  
L 160000  
B0 type functions.ExpRationalFunc  
   C1 -2.7e-5 1.9  
   C2 5.0e-11 -9.2e-6 1  
H0 type functions.Polynomial  
   C -2.9e-24 1.4e-18 -2.4e-13 1.75e-8 -5.2e-4 15.3  
  
## Hydrodynamics ##  
module semi_analytical2DV.HydroLead  
       semi_analytical2DV.HydroFirst  
A0 0 1.77 0  
A1 0 0 0.14  
phase0 0 0 0  
phase1 0 0 -1.3  
Q0 0  
Q1 60  
solver numerical  
submodules all  
  
## Turbulence ##  
module analytical2DV.TurbulenceUniform  
Av0amp 0.0367  
Av0phase 0.  
sf0 0.0048  
m 1.  
n 0.  
  
## Salinity ##  
module analytical2DV.SaltHyperbolicTangent  
ssea 30  
xc 55.e3  
xl 26.e3  
  
requirements ft St Flux
```

Figuur 10 – Hoofdgedeelte van de invoerfile voor iFlow. Het gedeelte dat de sedimentmodule aanstuurt is weergegeven in Fig. 4, Hoofdstuk 4.

B3 Jacobiaan van de modelvergelijkingen

Allereerst herhalen we dat $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, Y_3]$ de vector is van de gediscretiseerde modelvergelijkingen voor de sedimentvoorraad en -transport, Vgl. (31)-(36), en de algebraïsche vergelijking voor de erodeerbaarheid, Vgl. (29). De Jacobiaan van \mathbf{Y} als functie van $\mathbf{X} = [\tilde{S}, \mathcal{F}, f]$ kan nu worden geschreven in algemene vorm als

$$\mathbf{J}_{i,j}^{n+1} = \frac{\partial \mathbf{Y}_i^{n+1}}{\partial \mathbf{X}_j^{n+1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_{10}^{n+1}}{\partial \tilde{S}_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{10}^{n+1}}{\partial \tilde{S}_J^{n+1}} & \frac{\partial Y_{10}^{n+1}}{\partial \mathcal{F}_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{10}^{n+1}}{\partial \mathcal{F}_J^{n+1}} & \frac{\partial Y_{10}^{n+1}}{\partial f_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{10}^{n+1}}{\partial f_J^{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Y_{1I}^{n+1}}{\partial \tilde{S}_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{1I}^{n+1}}{\partial \tilde{S}_J^{n+1}} & \frac{\partial Y_{1I}^{n+1}}{\partial \mathcal{F}_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{1I}^{n+1}}{\partial \mathcal{F}_J^{n+1}} & \frac{\partial Y_{1I}^{n+1}}{\partial f_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{1I}^{n+1}}{\partial f_J^{n+1}} \\ \frac{\partial Y_{20}^{n+1}}{\partial \tilde{S}_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{20}^{n+1}}{\partial \tilde{S}_J^{n+1}} & \frac{\partial Y_{20}^{n+1}}{\partial \mathcal{F}_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{20}^{n+1}}{\partial \mathcal{F}_J^{n+1}} & \frac{\partial Y_{20}^{n+1}}{\partial f_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{20}^{n+1}}{\partial f_J^{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Y_{2I}^{n+1}}{\partial \tilde{S}_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{2I}^{n+1}}{\partial \tilde{S}_J^{n+1}} & \frac{\partial Y_{2I}^{n+1}}{\partial \mathcal{F}_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{2I}^{n+1}}{\partial \mathcal{F}_J^{n+1}} & \frac{\partial Y_{2I}^{n+1}}{\partial f_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{2I}^{n+1}}{\partial f_J^{n+1}} \\ \frac{\partial Y_{30}^{n+1}}{\partial \tilde{S}_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{30}^{n+1}}{\partial \tilde{S}_J^{n+1}} & \frac{\partial Y_{30}^{n+1}}{\partial \mathcal{F}_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{30}^{n+1}}{\partial \mathcal{F}_J^{n+1}} & \frac{\partial Y_{30}^{n+1}}{\partial f_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{30}^{n+1}}{\partial f_J^{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Y_{3I}^{n+1}}{\partial \tilde{S}_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{3I}^{n+1}}{\partial \tilde{S}_J^{n+1}} & \frac{\partial Y_{3I}^{n+1}}{\partial \mathcal{F}_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{3I}^{n+1}}{\partial \mathcal{F}_J^{n+1}} & \frac{\partial Y_{3I}^{n+1}}{\partial f_0^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial Y_{3I}^{n+1}}{\partial f_J^{n+1}} \end{bmatrix}$$

Hierbij is n de tijdstap Δt , $i = 0 \cdots I$ het ruimtelijke rooster van \mathbf{Y} en $j = 0 \cdots J$ het ruimtelijke rooster van \mathbf{X} . Het volgt dat de Jacobiaan een voornamelijk lege matrix is, waarvan de elementen met de eindige waarden als volgt gedefinieerd en gelokaliseerd zijn

1	$\frac{\theta \Delta t}{(C_0^{n+1})} \left(\frac{-3}{2\Delta x} + \frac{E_{0,x}}{B_0} \right)$ $\frac{2\theta \Delta t}{\Delta x (C_0^{n+1})}$ \dots $\frac{\theta \Delta t}{(C_0^{n+1})} \left(\frac{-3}{2\Delta x} + \frac{B_{I-2,x}}{B_{I-2}} \right)$ \dots $\frac{\theta \Delta t}{(C_0^{n+1})} \left(\frac{-3}{2\Delta x} + \frac{B_{I-2,x}}{B_{I-2}} \right)$ \dots $\frac{2\theta \Delta t}{\Delta x (C_0^{n+1})}$ \dots $\frac{\theta \Delta t}{2\Delta x (C_0^{n+1})}$	1 \dots 1	1 \dots 1	1 \dots 1
$\frac{\partial f_0^{n+1}}{\partial s_0^{n+1}}$ \dots $\frac{\partial f_{n+1}^{n+1}}{\partial s_{n+1}^{n+1}}$	0 1 \dots 1	0 1 \dots 1	1 \dots 1	1 \dots 1

DEPARTEMENT **MOBILITEIT & OPENBARE WERKEN**
Waterbouwkundig Laboratorium

Berchemlei 115, 2140 Antwerpen

T +32 (0)3 224 60 35

F +32 (0)3 224 60 36

waterbouwkundiglabo@vlaanderen.be

www.waterbouwkundiglaboratorium.be